

استدلال مریم

استدلال اینترنتی

کدام صحیح است؟ داود معصومی مهوار

بیشترین مقدار بشود، عدد b باید همین $۲^{۲۶}$ باشد و خواهیم داشت:

$$\Delta b = \Delta ۲^{۲۶} = ۲^{۲۵}, \quad \Delta \Delta b = \Delta ۲^{۲۵} = ۲^{۲۴},$$

$$\Delta \Delta \Delta b = \Delta ۲^{۲۴} = ۲^{۲۳}, \quad \Delta \Delta \Delta \Delta b = \Delta ۲^{۲۳} = ۲^{۲۲}$$

پس عدد $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ برابر است با: $۲^{۲۲} = ۴۱۹۴۳۰۴$ و هفت رقمی است.

در ضمن در کلیدی که آموزش و پرورش منتشر کرده هم پاسخ همین هفت رقمی، یعنی گزینه ج است. **زهرا:** به نظر من استدلالی که نفیسه نقل کرد درست نیست. اینکه $\frac{b}{p} < \frac{b}{۲}$ برای هر عدد اول p که از ۲ بزرگتر باشد درست است، ولی از این نابرابری نتیجه نادرستی گرفته‌اند و گفته‌اند:

برای اینکه عدد b را جوری انتخاب کنیم که Δb بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، کافی است که عدد b توانی از ۲ باشد. گزاره الف

برای این ادعا هیچ دلیلی نیاورده‌اند. **من:** می‌بینم که لیلا و چند نفر دیگر زهرا را تأیید می‌کنند، ولی بیشتر بچه‌های کلاس حرف او را قبول ندارند. **مژگان:** اگر قبول دارند که

$\frac{b}{p} < \frac{b}{۲}$ برای هر عدد اول p که از ۲ بزرگتر باشد درست است. گزاره ب

کوچک‌تر از خود $۳^۰$ را پیدا کنیم باید $۳^۰$ را بر دو تقسیم کنیم و خواهیم داشت $\Delta ۳^۰ = ۱۵$ ، اما درباره $\Delta \Delta ۳^۰$ یا همان $\Delta ۱۵$ به روش مشابه استدلال می‌کنیم و عدد ۱۵ را به کوچک‌ترین شمارنده غیر یک آن، یعنی عدد ۳ تقسیم می‌کنیم و عدد ۵ به عنوان $\Delta ۱۵$ به دست می‌آید. این استدلال به سادگی نشان می‌دهد برای آنکه تا حد ممکن Δb بزرگ باشد، باید عدد b بر ۲ بخش پذیر باشد تا داشته باشیم $\Delta b = \frac{b}{۲}$ ، زیرا $\frac{b}{۲}$ کوچک‌ترین عدد اول است و $\frac{b}{۳}$ مثلاً از $\frac{b}{۲}$ یا $\frac{b}{۵}$ بزرگ‌تر است و کلاً اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد داریم $\frac{b}{p} < \frac{b}{۲}$ پس برای اینکه عدد b را جوری انتخاب کنیم که Δb بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، کافی است که عدد b توانی از ۲ باشد و چون b باید هشت رقمی باشد، آزمایش می‌کنیم تا بزرگ‌ترین توان ۲ را که هشت رقمی نیز باشد، پیدا کنیم:

$$۲^{۲۲} = ۴۱۹۴۳۰۴ \quad ۲^{۲۳} = ۸۳۸۸۶۰۸$$

$$۲^{۲۴} = ۱۶۷۷۷۲۱۶ \quad ۲^{۲۵} = ۳۳۵۵۴۴۳۲$$

$$۲^{۲۶} = ۶۷۱۰۸۸۶۴ \quad ۲^{۲۷} = ۱۳۴۲۱۷۷۲۸$$

چنان که می‌بینیم $۲^{۲۷}$ نه رقمی است و $۲^{۲۶}$ هشت رقمی است. پس برای آنکه Δb

زهرا: لطفاً این زنگ را به بحث بچه‌ها اختصاص بدهید. درباره این پرسش از آزمون استعدادهای درخشان (نهم به دهم ۱۴۰۱) اختلاف پیش آمده است.

سؤال ۹۷. اگر a یک عدد طبیعی باشد، Δa را چنین تعریف می‌کنیم:

$\Delta a =$ بزرگ‌ترین شمارنده a که از a کوچک‌تر است. برای مثال: $\Delta ۱۵ = ۳^۰ = ۱۵$ و بنابراین: $\Delta \Delta ۳^۰ = \Delta ۱۵ = ۵$ عدد هشت رقمی b را به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که مقدار $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ بیشترین مقدار ممکن باشد. در این صورت، عدد $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ چند رقمی است؟ (الف) پنج (ب) شش (ج) هفت (د) هشت

من: خوب اختلاف چیست؟ **نفیسه:** یک راه حل و استدلال ساده هست که چندین معلم در اینترنت منتشر کرده‌اند. هیچ‌کس هم ایرادی به آن نگرفته است ولی لیلا و چند نفر دیگر آن را درست نمی‌دانند. راه حل این است.

عدد $۳^۰$ برابر است با $۲ \times ۳ \times ۵$ و روشن است که عددهای $۳^۰$ ، ۱۵ ، ۱۰ ، ۶ ، ۳ ، ۲ و ۱ همگی شمارنده $۳^۰$ هستند. عدد $\Delta ۳^۰$ باید بزرگ‌ترین شمارنده $۳^۰$ باشد ولی از خود $۳^۰$ کوچک‌تر باشد. از آنجا که داریم: $۳^۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ کافی است عدد $۳^۰$ را به کوچک‌ترین شمارنده غیر یک تقسیم کنیم. زیرا $۳^۰$ تقسیم بر یک برابر با خود $۳^۰$ می‌شود و نمی‌تواند $\Delta ۳^۰$ باشد. پس برای اینکه بزرگ‌ترین شمارنده

پس حتماً این گزاره‌ها را هم قبول دارند:

برای اینکه Δb بزرگ‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید داشته باشیم: $\Delta b = \frac{b}{4}$
 برای اینکه $\Delta \Delta b$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید داشته باشیم: $\Delta \Delta b = \frac{\Delta b}{4}$
 برای اینکه $\Delta \Delta \Delta b$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید داشته باشیم: $\Delta \Delta \Delta b = \frac{\Delta \Delta b}{4}$
 برای اینکه $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید داشته باشیم: $\Delta \Delta \Delta \Delta b = \frac{\Delta \Delta \Delta b}{4}$

خب از این جمله‌ها به روشنی می‌توان نتیجه گرفت که:

برای اینکه $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید داشته باشیم:
 $\Delta \Delta \Delta \Delta b = \frac{b}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$
 گزاره پ

اعظم: مژگان کاملاً درست استدلال کرد اما آنچه که نفیسه نقل کرد و زهرا قبول نداشت، چیز دیگری بود. زهرا دقیقاً نوشت کدام گزاره را قبول ندارد. زهرا گزاره الف را قبول ندارد، ولی مژگان به درستی از گزاره پ دفاع می‌کند.

سایه: خب طبق استدلال مژگان همه پذیرفتیم که بهترین حالت‌ها با به کار بردن گزاره ب به دست می‌آیند. پس اگر استدلال مژگان را همین‌طور ادامه بدهیم عدد b توانی از ۲ خواهد بود و درستی گزاره الف روشن خواهد شد.

لیلا: چیزی به نام «بهترین حالت یا بدترین حالت» نداریم. اگر گزاره الف را لازم دارید باید آن را اثبات کنید.

من: سایه خوب توجه کن. اگر استدلال مژگان را باز هم تکرار کنی دیگر چیزی درباره $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ دستگیر نخواهد شد. بلکه مثلاً درباره $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta b$ یا $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta b$ چیزهایی خواهی فهمید. حالا کمی سکوت کنید و فکر کنید تا ببینیم چه می‌شود.

نرگس (پس از دو دقیقه): فکر می‌کنم با ادامه روند استدلال مژگان نمی‌توان به گزاره الف رسید، ولی گزاره الف واقعاً درست است و باید با دلیلی دیگر به درستی آن برسیم. احساس می‌کنم واقعاً بهترین کار همین تقسیم کردن بر ۲ است و به این روش بزرگ‌ترین $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ پیدا می‌شود، ولی چرا آن را نمی‌دانم.

لیلا: گزاره الف اصلاً درست نیست. اگر داشته باشیم: $b = 99999984 \div 16 = 6249999$

$\Delta \Delta \Delta \Delta b = 99999984 \div 16 = 6249999$
 و به سادگی می‌بینیم که 6249999 از

بزرگ‌تر است! یعنی استدلالی که نقل کرده‌اند، اصلاً بزرگ‌ترین $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ را پیدا نکرده است و به‌طور اتفاقی تعداد رقم‌های آن را درست بیان کرده است. اگر پرسش کمی متفاوت طرح می‌شد و مثلاً می‌رسید: «رقم یکان $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ چیست؟» دیگر بخت یاری‌شان نمی‌کرد. احتمالاً رقم یکان را رقم یکان $2^2 = 4194304$ یعنی ۴ اعلام می‌کردند، در صورتی که من یک نمونه $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ معرفی کرده‌ام که بزرگ‌تر است و نشان می‌دهد که آن‌ها سراغ عدد دیگری رفته‌اند.

پریسا: فکر می‌کنم لیلا سفسطه می‌کند. او پرسش دیگری را طرح کرده است و می‌گوید که استدلال ما برای آن پرسش نتیجه غلط می‌دهد! خب ما استدلالمان را برای این پرسش طراحی کرده‌ایم.

من: لیلا درست می‌گوید. مثال نقض خوبی آورد. او نشان داد که شما در همان پرسش اصلی هم نتوانسته‌اید بزرگ‌ترین $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ را پیدا کنید. اما اگر بیشتر به مثال لیلا توجه کنید خواهید فهمید که از کجا پیدا شده است و راه درست استدلال را خواهید یافت.

نرگس (پس از یک دقیقه): عدد ۸۴ در 99999984 راه را نشان می‌دهد. احتمالاً لیلا به این فکر کرده است که عدد 100000000 که کوچک‌ترین عدد نه رقمی است، به ۱۶ بخش‌پذیر است، و: $100000000 - 16 = 99999984$
 یعنی 99999984 بزرگ‌ترین عدد هشت رقمی است که بر ۱۶ بخش‌پذیر است. پس اگر b را همین 99999984 بگیریم، بزرگ‌ترین $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ با تقسیم آن بر ۱۶ به دست خواهد آمد که همان عدد 6249999 است.

من: توجه کنید استدلالی که از اینترنت پیدا کرده بودید، تلاش می‌کرد برای بزرگ‌ترین بودن $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ آن را از این روش پیدا کند که b را بر ۲ تقسیم کند نه بر ۳ یا شمارنده‌های بزرگ‌تر از ۲ اما اصلاً توجه نکرده بود که برای بزرگ‌ترین بودن $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ باید به بزرگ‌ترین بودن خود b هم توجه کند. یعنی در گزاره ب درست استدلال می‌کردند و تلاش داشتند مخرج کسر را تا حد ممکن کوچک کنند، ولی توجه نداشتند که باید به صورت کسر هم

توجه کنند و تا حد ممکن آن را بزرگ‌تر بگیرند. لیلا همین کار را به سادگی انجام داد. خب حالا بگویید که چیزهایی که لیلا و نرگس گفتند استدلال کامل است یا هنوز کاستی‌هایی دارد؟

مریم: من فکر می‌کنم لیلا به روشی خوب و ساده عدد b را معرفی کرد و ادعا کرد که این b عدد $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ را چنان می‌سازد که از مورد ادعا شده در اینترنت بزرگ‌تر است. این موضوع را نیز به سادگی اثبات کرد. همچنین فکر می‌کنم لیلا ادعا دارد که عدد $b = 99999984$ بزرگ‌ترین $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ را می‌سازد. فکر می‌کنم استدلال او را می‌دانم و می‌توانم بیان کنم.

او چنین استدلال می‌کند که عدد $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ برابر با $99999984 \div 16 = 6249999$ است و این بزرگ‌ترین $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ ممکن است. فرض می‌کنیم بزرگ‌تر از این هم وجود داشته باشد. پس این $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ بزرگ‌تر باید دست کم یک واحد از 6249999 بزرگ‌تر باشد. یعنی باید بزرگ‌تر یا برابر با 6250000 باشد و در این صورت بنا بر گزاره ب و نتیجه آن عدد b باید ۱۶ برابر باشد. پس داریم $100000000 \div 16 = 6250000 \leq b$ که این با هشت رقمی بودن b تناقض دارد. بنابراین فرض ما (اینکه $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ می‌تواند بزرگ‌تر از 6249999 باشد) درست نیست. پس ثابت شد که اگر b عددی هشت رقمی باشد، بزرگ‌ترین $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ ممکن عدد 6249999 است.

من: بسیار عالی. بچه‌ها حواستان باشد، برای آنکه شبیه استدلال اینترنت به اشتباه نیفتید، برای بزرگ‌ترین بودن یک عدد باید استدلال بیاورید. خیلی ساده مانند مریم فرض کنید که آن عدد بزرگ‌ترین نباشد و از آن بزرگ‌تر هم وجود داشته باشد. (فرض خلف) سپس ادامه بدهید و اگر به تناقض رسیدید روشن می‌شود که فرض خلف نادرست و فاسد است. این روش به «برهان خلف» مشهور است.

الهام: یعنی واقعاً این همه معلم که در اینترنت همین روش را نوشته بودند، اشتباه کرده‌اند؟

من: اگر استدلالشان همان باشد که نفیسه و مژگان گفتند، خب بله اشتباه است و مثال لیلا نادرستی استدلال آن‌ها را نشان داد. از طرف دیگر، اگر در پرسش گفته نمی‌شد که $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ بزرگ‌ترین عدد ممکن است و مثلاً گفته می‌شد یکی مانده به بزرگ‌ترین است (یعنی یک عدد $\Delta \Delta \Delta \Delta b$ بزرگ‌تر از آن وجود دارد و نه بیشتر) و نیز عدد b را هشت رقمی اعلام نمی‌کرد، آن استدلال ممکن بود تعداد رقم‌ها را نیز نادرست پیدا کند. اگر حوصله دارید، تعداد رقم‌های b را برای اینکه نشان دهد آن استدلال نادرست کار می‌کند، پیدا کنید.